

LE MATRICI: IL MINORE COMPLEMENTARE

Data una matrice quadrata A di ordine n si definisce

minore complementare m_{ij}

dell'elemento generico a_{ij} della matrice A il
determinante della sottomatrice ottenuta da A
cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$n = 2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$m_{11} = |4| = 4$$

è il minore complementare di $a_{11} = 1$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$m_{12} = |3| = 3$$

è il minore complementare di $a_{12} = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \textcircled{3} & 4 \end{pmatrix}$$



$$m_{21} = |2| = 2$$

è il minore complementare di $a_{21} = 3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \textcircled{4} \end{pmatrix}$$



$$m_{22} = |1| = 1$$

è il minore complementare di $a_{22} = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$n = 3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 32 = -11$$

è il minore complementare di $a_{11} = 1$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{3} & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 24 = -18$$

è il minore complementare di $a_{12} = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \textcircled{5} \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 42 = -26$$

è il minore complementare di $a_{13} = 5$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \textcircled{2} & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 40 = -31$$

è il minore complementare di $a_{21} = 2$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & \textcircled{7} & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 30 = -27$$

è il minore complementare di $a_{22} = 7$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & \textcircled{4} \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

è il minore complementare di $a_{23} = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ \textcircled{6} & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 35 = -23$$

è il minore complementare di $a_{31} = 6$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & \textcircled{8} & 3 \end{pmatrix}$$



$$m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6$$

è il minore complementare di $a_{32} = 8$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & \textcircled{3} \end{pmatrix}$$



$$m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1$$

è il minore complementare di $a_{33} = 3$

LE MATRICI: IL COMPLEMENTO ALGEBRICO

Data una matrice quadrata A di ordine n si definisce

complemento algebrico c_{ij}

dell'elemento generico a_{ij} della matrice A il
minore complementare di a_{ij} , preso con il segno

positivo o **negativo** a seconda che $i+j$ sia

rispettivamente **pari** o **dispari**

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$n = 2$$



(cfr. slide 2 per i minori
complementari)

$$c_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{11} = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{12} = 2$$

$$c_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{21} = 3$$

$$c_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{22} = 4$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n} = 3$$

↓ (cfr. slide 3 per i minori complementari)

$$\mathbf{c}_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = + (21 - 32) = -11$$

è il complemento algebrico di $a_{11} = 1$

$$\mathbf{c}_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = - (6 - 24) = +18$$

è il complemento algebrico di $a_{12} = 3$

$$\mathbf{c}_{13} = (-1)^{i+j} \cdot m_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = + (16 - 42) = -26$$

è il complemento algebrico di $a_{13} = 5$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



(cfr. slide 4 per i minori
complementari)

$$c_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = - (9 - 40) = +31$$

è il complemento algebrico di $a_{21} = 2$

$$c_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = + (3 - 30) = -27$$

è il complemento algebrico di $a_{22} = 7$

$$c_{23} = (-1)^{i+j} \cdot m_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = - (8 - 18) = +10$$

è il complemento algebrico di $a_{23} = 4$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$



(cfr. slide 5 per i minori
complementari)

$$c_{31} = (-1)^{i+j} \cdot m_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = + (12 - 35) = -23$$

è il complemento algebrico di $a_{31} = 6$

$$c_{32} = (-1)^{i+j} \cdot m_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = - (4 - 10) = +6$$

è il complemento algebrico di $a_{32} = 8$

$$c_{33} = (-1)^{i+j} \cdot m_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = + (7 - 6) = +1$$

è il complemento algebrico di $a_{33} = 3$

LE MATRICI: IL MINORE ESTRATTO

Data una qualunque matrice A di ordine $m \times n$ si definisce

minore estratto dalla matrice A di ordine $m-i$

il determinante ottenuto da A cancellando i righe

e j colonne in modo tale che risulti

$$m-i = n-j$$

Osservazioni!

Ogni elemento di una qualunque matrice A
è un minore del primo ordine estratto da A

Data una qualunque matrice rettangolare A
di ordine $m \times n$ risulta sempre possibile estrarre
da essa dei minori aventi per ordine
il più piccolo tra i numeri m ed n

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$m = 3 > n = 2$$



$$|1|, |2|, |3|, |5|, |7|, |9|$$

sono *tutti* i minori estraibili da A del primo ordine:
 si ottengono considerando, passo dopo passo,
 tutti gli elementi di A

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

sono *tutti* i minori estraibili da A del secondo ordine:
 si ottengono cancellando, passo dopo passo, le tre
 righe di A

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = 2 < n = 3$$



$$|1|, |2|, |3|, |2|, |-1|, |0|$$

**sono *tutti* i minori estraibili da A del primo ordine:
si ottengono considerando, passo dopo passo,
tutti gli elementi di A**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

**sono *tutti* i minori estraibili da A del secondo ordine:
si ottengono cancellando, passo dopo passo, le tre
colonne di A**

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad m = 3 < n = 4$$



$$|1|, |2|, |-1|, |3|, |-2|, |-4|, |2|, |-6|, |1|, |-1|, |3|, |-3|$$

**sono *tutti* i minori estraibili da A del primo ordine:
si ottengono considerando, passo dopo passo,
tutti gli elementi di A**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \dots$$

**sono *solo alcuni* minori estraibili da A del secondo ordine:
sono stati ottenuti cancellando, passo dopo passo,
una riga e due colonne di A**

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

**sono *tutti* i minori estraibili da A del terzo ordine:
 si ottengono cancellando, passo dopo passo, le
 quattro colonne di A**

DETERMINANTI DEL QUARTO ORDINE

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 3$ ($n = 3, 4, 5, 6, \dots$) occorre fissare una riga (o colonna) a piacere e poi sommare i prodotti degli elementi della riga (o colonna) scelta per i rispettivi complementi algebrici

Osservazione!

**La regola precedente è applicabile anche
per matrici quadrate di ordine 3, cioè per:**

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

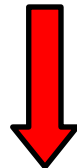
$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

.....

Regola pratica!

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 3$ ($n = 3, 4, 5, 6, \dots$) si procede come segue:

- si fissa una riga (o colonna) a proprio piacere
(generalmente quella con un maggior numero di zeri)
- si applica la **regola dei segni** (cfr. slide 20)
- si sommano i prodotti ottenuti moltiplicando gli
elementi della riga (o colonna) scelta per i
propri minori complementari



METODO DI LAPLACE

Regola dei segni!

**Data una matrice quadrata A di ordine $n \geq 3$,
all'elemento a_{11} si attribuisce sempre il segno positivo;
si procede, per righe e per colonne, mai per diagonali,
a segni alterni;
il procedimento si arresta nel momento in cui,
a ciascun elemento della riga (o colonna) scelta a priori,
sia stato attribuito un segno**

RIEPI IL LOGO

A è una matrice quadrata di ordine ***n*** = 1



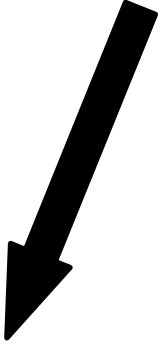
$$\textit{det}A_1 = a_{11}$$

A è una matrice quadrata di ordine ***n*** = 2

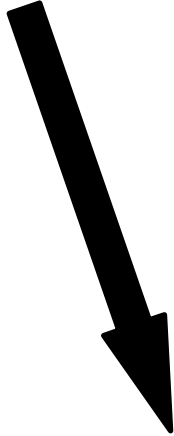


$$\textit{det}A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

A è una matrice quadrata di ordine $n = 3$



Sarrus



Laplace

A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 4$ ($n = 4, 5, 6, \dots$)



Laplace

Esempio 1

$$n = 3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Sarrus



$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 141$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$



fissiamo, ad esempio,
la prima riga

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$



per la regola dei segni

$$A_3 = \begin{pmatrix} + & - & + \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{+}3 & \textcolor{blue}{-}2 & \textcolor{blue}{+}(-1) \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

 **Laplace**

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{det}A_3 &= +3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = \\ &= +3 \cdot (20 + 14) - 2 \cdot (-25 - 6) + (-1) \cdot (35 - 12) = \\ &= 102 + 62 - 23 = 164 - 23 = \textcolor{red}{141} \end{aligned}$$



**Se l'ordine della matrice è 3 risulta sempre
possibile calcolare il suo determinante
applicando *indifferentemente* Sarrus o Laplace**

Esempio 2

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 4$$



fissiamo, ad esempio,
la terza riga

$$\xrightarrow{A_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{\quad}$$



per la regola dei segni

$$A_4 = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 \\ \overset{+}{0} & \hline 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Laplace

$$\det A_4 = +0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-2 - 2) - 0 \cdot (2 + 2) + (-1) \cdot (1 - 2 - 3) + (-1) \cdot (-2 - 4 - 6) =$$

$$= +4 + 12 = +16$$

Osservazioni!

**I determinanti del terzo ordine dell'esempio 2
possono essere calcolati utilizzando indifferentemente**

Sarrus* o *Laplace

**Nell'esempio 2 è stato sufficiente calcolare gli ultimi
due determinanti del terzo ordine
(gli altri sono moltiplicati per 0!!!)**

**Quando si utilizza *Laplace* conviene fissare sempre una
riga (o una colonna) nella quale ci sia un maggior
numero di zeri (i calcoli si semplificano!!!)**